Résolution de l'équation de la chaleur 1D discrétisée avec AMESim

S.S.I.

17 janvier 2014

Equation de la chaleur (Rappel)

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de la chaleur.

Hypothèses :

- matériau solide occupant un domaine D à 3 dimensions (x, y, z)
- masse volumique ρ et capacité calorifique C dépendent des trois dimensions mais pas du temps t
- ce matériau reçoit, conduit et absorbe un certain flux de chaleur, sa température T dépend donc de l'espace et du temps $T = T(x, y, z; t)$
- il en est de même du vecteur « densité du flux de chaleur » $\vec{q}$: $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z; t)$

Equation de la chaleur (Rappel)

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de la chaleur.

Hypothèses :

- matériau solide occupant un domaine D à 3 dimensions (x, y, z)
- masse volumique ρ et capacité calorifique C dépendent des trois dimensions mais pas du temps t
- ce matériau reçoit, conduit et absorbe un certain flux de chaleur, sa température T dépend donc de l'espace et du temps $T = T(x, y, z; t)$
- il en est de même du vecteur « densité du flux de chaleur » $\vec{q}$: $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z; t)$

Equation de la chaleur (Rappel)

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de la chaleur.

Hypothèses :

- matériau solide occupant un domaine D à 3 dimensions (x, y, z)
- masse volumique ρ et capacité calorifique C dépendent des trois dimensions mais pas du temps t
- ce matériau reçoit, conduit et absorbe un certain flux de chaleur, sa température T dépend donc de l'espace et du temps $T = T(x, y, z; t)$
- il en est de même du vecteur « densité du flux de chaleur » $\vec{q}$: $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z; t)$

Equation de la chaleur (Rappel)

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de la chaleur.

Hypothèses :

- matériau solide occupant un domaine D à 3 dimensions (x, y, z)
- masse volumique ρ et capacité calorifique C dépendent des trois dimensions mais pas du temps t
- ce matériau reçoit, conduit et absorbe un certain flux de chaleur, sa température T dépend donc de l'espace et du temps $T = T(x, y, z; t)$
- il en est de même du vecteur ≪ densité du flux de chaleur ≫ $\vec{q}$: $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z; t)$

Equation de la chaleur (Rappel)

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de la chaleur.

Hypothèses :

- matériau solide occupant un domaine D à 3 dimensions (x, y, z)
- masse volumique ρ et capacité calorifique C dépendent des trois dimensions mais pas du temps t
- ce matériau reçoit, conduit et absorbe un certain flux de chaleur, sa température T dépend donc de l'espace et du temps $T = T(x, y, z; t)$
- il en est de même du vecteur « densité du flux de chaleur » $\vec{q}$: $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z; t)$

Equation de la chaleur (Rappel)

Rappelons d'abord l'établissement de l'équation de la chaleur.

Hypothèses :

- matériau solide occupant un domaine D à 3 dimensions (x, y, z)
- masse volumique ρ et capacité calorifique C dépendent des trois dimensions mais pas du temps t
- ce matériau reçoit, conduit et absorbe un certain flux de chaleur, sa température T dépend donc de l'espace et du temps $T = T(x, y, z; t)$
- il en est de même du vecteur « densité du flux de chaleur » $\vec{q}$: $\vec{q} = \vec{q}(x, y, z; t)$

Rappelons que, par définition même de $\vec{q}$, $\forall \Omega \in D$, la quantité de chaleur reçue par Ω à travers Σ (frontière du domaine), par unité de temps, est égale à :

$$\iint_{\Sigma} -\vec{q}.\vec{n}\mathrm{d}\Sigma = \iiint_{\Omega} -div(\vec{q})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1}$$

où $\vec{n}$ représente la normale à Σ extérieure à Ω.

Par unité de temps, le « stock » d'énergie thermique accumulée par le matériau par échauffement (i.e. « l'énergie interne » du matériau) s'accroit de :

$$\int_{\Omega} C\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}m = \iiint_{\Omega} C\frac{\partial T}{\partial t}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2}$$

Rappelons que, par définition même de $\vec{q}$, $\forall \Omega \in D$, la quantité de chaleur reçue par Ω à travers Σ (frontière du domaine), par unité de temps, est égale à :

$$\iint_{\Sigma} -\vec{q}.\vec{n}\mathrm{d}\Sigma = \iiint_{\Omega} -div(\vec{q})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1}$$

où $\vec{n}$ représente la normale à Σ extérieure à Ω.

Par unité de temps, le ≪ stock ≫ d'énergie thermique accumulée par le matériau par échauffement (i.e. ≪ l'énergie interne ≫ du matériau) s'accroit de :

$$\int_{\Omega} C\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}m = \iiint_{\Omega} C\frac{\partial T}{\partial t}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2}$$

On fait le bilan : la variation de stock est égale à ce qui entre.
D'où (1)=(2)

$$\iiint_{\Omega} \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{q}) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

et ceci $\forall \Omega \in D$.

Supposant l'intégrand continu, on en déduit qu'il est identiquement nul, soit :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -div(\vec{q}) \tag{3}$$

Introduisons maintenant une « loi de comportement » linéaire :

$$\vec{q} = -k\vec{grad}(T) \tag{4}$$

avec $k = k(x, y, z) > 0$, conductivité thermique du matériau.

On fait le bilan : la variation de stock est égale à ce qui entre.
D'où (1)=(2)

$$\iiint_{\Omega} \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{q}) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

et ceci $\forall \Omega \in D$.

Supposant l'intégrand continu, on en déduit qu'il est identiquement nul, soit :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -div(\vec{q}) \tag{3}$$

Introduisons maintenant une « loi de comportement » linéaire :

$$\vec{q} = -k\vec{grad}(T) \tag{4}$$

avec $k = k(x, y, z) > 0$, conductivité thermique du matériau.

On fait le bilan : la variation de stock est égale à ce qui entre.
D'où (1)=(2)

$$\iiint_{\Omega} \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{q}) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

et ceci $\forall \Omega \in D$.

Supposant l'intégrand continu, on en déduit qu'il est identiquement nul, soit :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -div(\vec{q}) \tag{3}$$

Introduisons maintenant une « loi de comportement » linéaire :

$$\vec{q} = -k\vec{grad}(T) \tag{4}$$

avec $k = k(x, y, z) > 0$, conductivité thermique du matériau.

De (3) et (4) nous déduisons :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = div(k\vec{grad}(T))$$

Si maintenant le matériau est homogène, ρ, C et k sont constantes, d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$$

avec :

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} = Constante > 0$$

Equation dite de la chaleur avec α diffusivité thermique.

De (3) et (4) nous déduisons :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = div(kgra\vec{d}(T))$$

Si maintenant le matériau est homogène, ρ, C et k sont constantes, d'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$$

avec :

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} = Constante > 0$$

Equation dite de la chaleur avec α diffusivité thermique.

Exemple de résolution par discrétisation

Nous allons nous intéresser à la résolution de cette équation sous AMESim pour le cas d'une barre métallique.

Pour cet exemple nous allons considérer un matériau homogène et faire l'hypothèse que le transfert de chaleur est dans une seule dimension x.

Le solveur d'AMESim gère l'évolution temporelle des variables, mais par contre aucun composant standard de la bibliothèque thermique ne permet de faire un calcul de conduction thermique dans un solide continu. Mais en s'inspirant d'une méthode par différences finies, on peut approcher la représentation de la conduction thermique en 1 ou 2 dimensions.

Exemple de résolution par discrétisation

Nous allons nous intéresser à la résolution de cette équation sous AMESim pour le cas d'une barre métallique.

Pour cet exemple nous allons considérer un matériau homogène et faire l'hypothèse que le transfert de chaleur est dans une seule dimension x.

Le solveur d'AMESim gère l'évolution temporelle des variables, mais par contre aucun composant standard de la bibliothèque thermique ne permet de faire un calcul de conduction thermique dans un solide continu. Mais en s'inspirant d'une méthode par différences finies, on peut approcher la représentation de la conduction thermique en 1 ou 2 dimensions.

Exemple de résolution par discrétisation

Nous allons nous intéresser à la résolution de cette équation sous AMESim pour le cas d'une barre métallique.

Pour cet exemple nous allons considérer un matériau homogène et faire l'hypothèse que le transfert de chaleur est dans une seule dimension x.

Le solveur d'AMESim gère l'évolution temporelle des variables, mais par contre aucun composant standard de la bibliothèque thermique ne permet de faire un calcul de conduction thermique dans un solide continu.
Mais en s'inspirant d'une méthode par différences finies, on peut approcher la représentation de la conduction thermique en 1 ou 2 dimensions.

Exemple de résolution par discrétisation

Nous allons nous intéresser à la résolution de cette équation sous AMESim pour le cas d'une barre métallique.

Pour cet exemple nous allons considérer un matériau homogène et faire l'hypothèse que le transfert de chaleur est dans une seule dimension x.

Le solveur d'AMESim gère l'évolution temporelle des variables, mais par contre aucun composant standard de la bibliothèque thermique ne permet de faire un calcul de conduction thermique dans un solide continu.
Mais en s'inspirant d'une méthode par différences finies, on peut approcher la représentation de la conduction thermique en 1 ou 2 dimensions.

L'équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T\right)$ se simplifie pour un problème à une dimension (x) en :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

q et T n'étant respectivement dépendants que de x et t.

Discrétisons la barre par différences finies centrées en considérant n points distants du pas p :

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_j = \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2} - \Theta(p^2)$$

avec $\Theta(p)$ fonction dont la valeur est d'autant plus proche de zéro que le nombre d'éléments de discrétisation n est grand.

L'équation de la chaleur $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T\right)$ se simplifie pour un problème à une dimension (x) en :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

q et T n'étant respectivement dépendants que de x et t.

Discrétisons la barre par différences finies centrées en considérant n points distants du pas p :

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_j = \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2} - \Theta(p^2)$$

avec $\Theta(p)$ fonction dont la valeur est d'autant plus proche de zéro que le nombre d'éléments de discrétisation n est grand.

Soit pour n grand :

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_j \simeq \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2}$$

Ce qui nous donne pour l'équation de la chaleur discrétisée :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \alpha \left(\frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2}\right)$$

Ce que l'on peut remettre sous la forme :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \alpha \left(\frac{T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})}{p^2}\right)$$

Soit pour n grand :

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_j \simeq \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2}$$

Ce qui nous donne pour l'équation de la chaleur discrétisée :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \alpha \left(\frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2}\right)$$

Ce que l'on peut remettre sous la forme :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \alpha \left(\frac{T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})}{p^2}\right)$$

Soit pour n grand :

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_j \simeq \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2}$$

Ce qui nous donne pour l'équation de la chaleur discrétisée :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \alpha \left(\frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{p^2}\right)$$

Ce que l'on peut remettre sous la forme :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \alpha \left(\frac{T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})}{p^2}\right)$$

Soit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k}{\rho * C}\left(\frac{T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})}{p^2}\right) \tag{5}$$

Le volume de l'élément discrétisé vaut, avec S section de la barre :

$$V = S * p$$

la masse de l'élément discrétisé vaut :

$$m = \rho * V = \rho * S * p$$

soit

$$\rho * p = \frac{m}{S} \tag{6}$$

soit en substituant (6) dans l'équation de la chaleur discrétisée (5)

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k * S}{m * C * p}\left(T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})\right)$$

Soit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k}{\rho * C}\left(\frac{T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})}{p^2}\right) \tag{5}$$

Le volume de l'élément discrétisé vaut, avec S section de la barre :

$$V = S * p$$

la masse de l'élément discrétisé vaut :

$$m = \rho * V = \rho * S * p$$

soit

$$\rho * p = \frac{m}{S} \tag{6}$$

soit en substituant (6) dans l'équation de la chaleur discrétisée (5)

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k * S}{m * C * p}\left(T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})\right)$$

Soit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k}{\rho * C}\left(\frac{T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})}{p^2}\right) \quad (5)$$

Le volume de l'élément discrétisé vaut, avec S section de la barre :

$$V = S * p$$

la masse de l'élément discrétisé vaut :

$$m = \rho * V = \rho * S * p$$

soit

$$\rho * p = \frac{m}{S} \quad (6)$$

soit en substituant (6) dans l'équation de la chaleur discrétisée (5)

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k * S}{m * C * p}\left(T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})\right)$$

Soit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k}{\rho * C}\left(\frac{T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})}{p^2}\right) \tag{5}$$

Le volume de l'élément discrétisé vaut, avec S section de la barre :

$$V = S * p$$

la masse de l'élément discrétisé vaut :

$$m = \rho * V = \rho * S * p$$

soit

$$\rho * p = \frac{m}{S} \tag{6}$$

soit en substituant (6) dans l'équation de la chaleur discrétisée (5)

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{k * S}{m * C * p}\left(T_{j+1} - T_j - (T_j - T_{j-1})\right)$$

Soit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{1}{m * C}\left[\frac{k * S}{p}(T_{j+1} - T_j) - \frac{k * S}{p} * (T_j - T_{j-1})\right]$$

On peut représenter cette équation sous AMEsim en remarquant qu'il est existe des fonctions de la bibliothèque thermique pour chacun des termes.

La capacité thermique (*thermal capacity*) nous permet de représenter le terme de stockage, avec Q chaleur échangée par le composant avec l'extérieur :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{1}{m * C} * Q$$

Le composant de transfert thermique conductif linéaire (*linear conductive exchange*), nous permet de représenter l'énergie échangée par conduction :

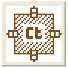
$$Q = \frac{k * S}{p}(T_{j+1} - T_j)$$

Soit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{1}{m * C}\left[\frac{k * S}{p}(T_{j+1} - T_j) - \frac{k * S}{p} * (T_j - T_{j-1})\right]$$

On peut représenter cette équation sous AMEsim en remarquant qu'il est existe des fonctions de la bibliothèque thermique pour chacun des termes.

La capacité thermique (*thermal capacity*) nous permet de représenter le terme de stockage, avec Q chaleur échangée par le composant avec l'extérieur :



$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{1}{m * C} * Q$$

Le composant de transfert thermique conductif linéaire (*linear conductive exchange*), nous permet de représenter l'énergie échangée par conduction :

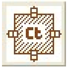
$$Q = \frac{k * S}{p}(T_{j+1} - T_j)$$

Soit :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{1}{m*C}\left[\frac{k*S}{p}(T_{j+1}-T_j)-\frac{k*S}{p}*(T_j-T_{j-1})\right]$$

On peut représenter cette équation sous AMEsim en remarquant qu'il est existe des fonctions de la bibliothèque thermique pour chacun des termes.

La capacité thermique (*thermal capacity*) nous permet de représenter le terme de stockage, avec Q chaleur échangée par le composant avec l'extérieur :



$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{1}{m*C}*Q$$

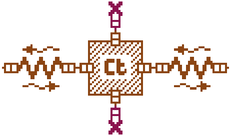
Le composant de transfert thermique conductif linéaire (*linear conductive exchange*), nous permet de représenter l'énergie échangée par conduction :

$$Q = \frac{k*S}{p}(T_{j+1}-T_j)$$

Et donc la résolution de cette équation :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_j \simeq \frac{1}{m * C}\left[\frac{k * S}{p}(T_{j+1} - T_j) - \frac{k * S}{p} * (T_j - T_{j-1})\right]$$

Peut être réalisée sous AMEsim par l'assemblage de ces fonctions :



En généralisant ce motif, on peut donc approcher la représentation d'une barre métallique :